Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Septiembre - Diciembre 2007

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: ______

2do. Parcial de Matemáticas I (Recuperación)

1. (5ptos c/u ptos.) Resolver:

   (a) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2x^2-3x})$

   (b) $\lim_{t\to 0}\dfrac{1-\cos^3(t)}{\operatorname{sen}^2(t)}$

   Sugerencia: en (b) considere que para cualesquiera a y b se tiene: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

   Soluciones:

   (a)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2x^2-3x}) \quad = \\
&= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2x^2-3x})\frac{(\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x^2-3x})}{(\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x^2-3x})} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2+x-1}+\sqrt{2x^2-3x}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{x}}} \quad = \quad \frac{4}{2\sqrt{2}} \quad = \quad \sqrt{2}
\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^3(t)}{\operatorname{sen}^2(t)} \quad &= \quad \lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos(t))(1+\cos(t)+\cos^2(t))}{\operatorname{sen}^2(t)} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1-\cos(t))}{t^2}\,(1+\cos(t)+\cos^2(t))\,\frac{t^2}{\operatorname{sen}^2(t)} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\cdot\lim_{t\to 0}(1+\cos(t)+\cos^2(t))\cdot\left(\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\right)^{-2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1 \quad = \quad \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2. (9 ptos.) Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 - 1 & \text{si } x \leq -\dfrac{3}{2} \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } -\dfrac{3}{2} < x \leq \dfrac{3}{2} \\ 4x + b & \text{si } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Encuentre los valores de a y de b para que la función sea continua en los puntos $x = -\dfrac{3}{2}$ y $x = \dfrac{3}{2}$

Solución:

(I) Continuidad en $x = -\dfrac{3}{2}$
Hay que exigir que:

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}^-} f(x) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} f(x)$$

Veamos:

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^-} ((x-a)^2 - 1) = (-\frac{3}{2} - a)^2 - 1 = f\left(-\frac{3}{2}\right) = a^2 + 3a + \frac{5}{4}$$

y

$$\lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{3}{2}^+} \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

Luego:

$$a^2 + 3a + \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 3a + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

(II) Continuidad en $x = \dfrac{3}{2}$
Hay que exigir que:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x)$$

Veamos:

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^-} \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = -1$$

y

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}^+} (4x + b) = 4\left(\frac{3}{2}\right) + b = 6 + b$$

Luego:

$$6 + b = -1 \Leftrightarrow b = -7$$

Finalmente los valores pedidos son $a = \dfrac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$ y $b = -7$

3. (9 ptos.) Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x+3}{2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

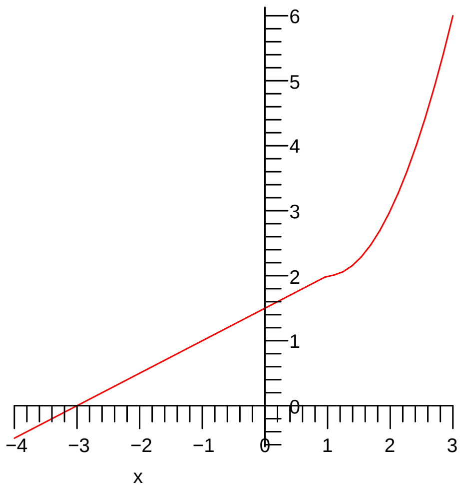
(a) Grafique f. Diga dominio y rango.

(b) Diga si f es inyectiva. Justifique.

(c) En caso de ser f inyectiva, calcule su inversa f^{-1} y diga su dominio y su rango.

Solución:

(a) Llamemos $f_1(x) = x^2 - 2x + 3$ y $f_2 = \dfrac{x+3}{2}$
Entonces $Dom(f) = Dom(f_2) \cup Dom(f_1) = (-\infty, 1) \cup [1, \infty) = \mathbb{R}$,
$Rgo(f) = Rgo(f_2) \cup Rgo(f_1) = (-\infty, 2) \cup [2, \infty) = \mathbb{R}$
y la gráfica de f queda así:



(b) De la gráfica de f podemos decir que cualquier recta horizontal la corta en exactamente un punto, luego f es inyectiva, y por tanto f_1 y f_2 también lo son.

(c) Hay que calcular las inversas de f_1 y f_2. Veamos:

$$y = f_1(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$y - 2 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y-2} \quad \text{pues} \quad x \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y-2} + 1 = f_1^{-1}(y)$$

Luego: $f_1^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$, $Dom(f_1^{-1}) = Rgo(f_1) = [2, \infty)$, y $Rgo(f_1^{-1}) = Dom(f_1) = [1, \infty)$
Por otro lado:

$$y = f_2(x) = \frac{x+3}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$2y = x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2y - 3 = f_2^{-1}(y)$$

Luego: $f_2^{-1}(x) = 2x - 3$, $Dom(f_2^{-1}) = Rgo(f_2) = (-\infty, 2)$, y $Rgo(f_2^{-1}) = Dom(f_2) = (-\infty, 1)$
Finalmente:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}+1 & \text{si } x \geq 2 \\ 2x-3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

y $Dom(f^{-1}) = Rgo(f) = \mathbb{R}$, $Rgo(f^{-1}) = Dom(f) = \mathbb{R}$

4. (7 ptos.) Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \tan^2(x-2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Demuestre que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

Solución:

Tenemos que $-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1$ para cualquier α, luego, si $x \neq 2$ entonces:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\tan^2(x-2) \leq \tan^2(x-2)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) \leq \tan^2(x-2)$$

Como:

$$\lim_{x\to 2}(-\tan^2(x-2)) = \lim_{x\to 2}(\tan^2(x-2)) = 0$$

Entonces por el teorema del sandwich podemos concluir que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\tan^2(x-2)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) = 0 = f(2)$$

Lo cual termina la demostración.

¡Justifique todas sus respuestas!